## Dagens 1/9

1. Skriv på formen $a + bi$, där $a$ och $b$ är reella tal.

   a. $(2 + i)(1 - 2i)^2$   b. $\dfrac{1 + 2i}{3 - 4i} + \dfrac{3i}{1 + 2i}$

2. Lös ekvationerna

   a. $(2 - i)z = 3 + i$   b. $(2 + i)\bar{z} = 1 + 3i$   c. $(2 + i)\bar{z} + iz = 2 - 2i$

3. Skriv på polär form

   a. $\dfrac{(2 + 2i)(1 + i\sqrt{3})}{(\sqrt{12} - 2i)i}$   b. $\dfrac{(\sqrt{3} + 3i)^4}{(1 - i)^6}$

4. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} -iz + (1 + i)w = 2i \\ (1 + i)\bar{z} + (2 - i)\bar{w} = 3 - 2i \end{cases}$.

5. Visa att om $|z| = 1$ så är $|2z - 1| = |z - 2|$.

6. a. $z^2 = 8 - 6i$   b. $z^4 + 4 = 0$   c. $(z - 1)^3 + 8i = 0$

7. Bestäm en polynomekvation av lägsta möjliga grad, som

   a. har rötterna 1 - 2*i* och *i*.

   b. har rötterna 1 - 2*i* och *i* samt reella koeffieienter.

8. Ange summan resp. produkten av rötterna till ekvationen

   a. $z^2 + (3 - 2i)z + 1 - 3i = 0$   b. $z^3 + (6 - 3i)z^2 + (8 - 12i)z + 10i = 0$

9. a. Lös ekvationen $z\bar{z} - \bar{z} = 1 - i$. ($\bar{z}$ är konjugatet till $z$.)
   Tips: sätt $z = a + bi$.

   b. Ekvationerna $z^3 - (1 - i)z^2 - 8iz + 8 + 8i = 0$ och $z\bar{z} - \bar{z} = 1 - i$ har en rot gemensam. Lös den första ekvationen.

## Svar:

1. a. -2 - 11*i*   b. 1 + *i*
2. a. 1 + *i*   b. 1 - *i*   c, 1+2i
3. a. $\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$   b. $18(\cos(-7\pi/6) + i\sin(-7\pi/6))$
4. $z = 1 - i$, $w = 2 + i$
6. 3 - *i*, -3 + *i*   b. 1 + *i*, 1 - i , -1 + *i*, -1 - *i*   c. $1 + \sqrt{3} - i$, $1 - \sqrt{3} - i$, $1 + 2i$
7. a. $z^2 - (1 - i)z + 2 + i$   b. $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$
8. a. Summan $= -3 + 2i$, produkten = 1 - 3*i*   b. Summan $= 6 - 3i$, produkten = -10*i*
9. a. -*i*, 1 - *i*   b. 1 - *i*, 2 + 2*i*, -2-2*i*

## Dagens 3/9

1. Uppdela så långt som möjligtt i reella faktorer.

   a. $z^{4} - 6z^2 + 25$ b. $z^{6} - 7z^3 - 8$

2.* Visa att om $z^3 + z^2 + 3z + 6 = 0$, så är $|z| > 1$.

3. Visa med induktion att $4^n - 1$ är jämnt delbart med 3 för $n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Visa med induktion att $11^n - 1$ är jämnt delbart med 5 för $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. Visa med induktion att $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

6. Visa med induktion att $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

7. Visa med induktion att $(2 + \frac{1}{10})^n \geq 2^n + \frac{n}{10}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

8. Visa med induktion att $\sum_{k=2} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$

9. Visa med induktion att $2 \cdot 10^n + 3 \cdot 10^{n-1} + 4$ är jämnt delbart med 9 för $n = 1, 2, 3, \ldots$

10. Visa att $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
    Ledning: Observera att $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.

## Svar:

1. a. $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z + 5)$ b. $(z - 2)(z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + 2z + 4)$